Ueber Rollcurven,

die von

einer Geraden eingehüllt werden.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht

von

Wilhelm Merkelbach.

Marburg.

1881.

I. Bestimmung der Gleichung der eingehüllten Rollcurve.

Wenn eine gegebene bewegliche Curve auf einer anderen, festen Curve ohne zu gleiten fortrollt, so wird eine in der Ebene der ersten Curve liegende und mit ihr fest verbundene Gerade eine Linie umhüllen, mit deren Untersuchung vorliegende Arbeit sich beschäftigen soll. Dabei heisse die gegebene feste Curve die „Basis", die bewegliche Linie die „rollende Curve"; die von der Geraden eingehüllte Linie möge die „eingehüllte Rollcurve" genannt werden (zum Unterschied von den Curven, die ein bestimmter in der Ebene der rollenden Curve liegender Punkt beschreibt und die man kurzweg „Rollcurven"*) bezeichnet hat).

Da wir uns die Curven als gebrochene Linien, die aus unendlich kleinen Strecken zusammengesetzt sind, denken können, so betrachten wir zunächst die eingehüllte Rollcurve, die entsteht, wenn eine bewegliche gebrochene Linie auf einer festen gebrochenen Linie ohne zu gleiten sich fortbewegt. Wir nehmen dabei an, die bei der Bewegung der Reihe nach zusammenfallenden Strecken beider gebrochenen Linien seien gleich.

Es stelle nun in *Fig. 1* die gebrochene Linie $ABCDEF$ die Basis vor, auf welcher die gebrochene Linie $A_0 B_0 C_0$

*) Vergl. die Untersuchung derselben bei Schlömilch, Uebungsbuch z. St. d. h. Anal. II., § 43.

$D_0 E_0 F_0$ sich fortbewege, und es sei $AB = A_0 B_0$, $BC = B_0 C_0$, $CD = C_0 D_0$ etc. Die mit der beweglichen Linie festverbundene umhüllende Gerade sei l_0. Bei der Anfangslage der Linie $A_0 B_0 C_0 D_0 E_0 F_0$ falle $A_0 B_0$ mit AB zusammen. Bei der darauf folgenden Lage der beweglichen Linie (in der Fig. bezeichnet durch $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$) muss dann $B_0 C_0$ mit BC zusammenfallen; dabei wird zugleich l_0 in die Stellung l_1 gerückt sein. In diese zweite Lage gelangt aber die rollende Linie durch Drehung ihrer Ebene um den Punkt B, und zwar wird die Grösse des Drehungswinkels durch $\angle C_0 B C_1$ angegeben. Bei dieser Drehung umhüllt die Linie l_0 einen Kreisbogen, dessen Radius das von B auf l_0 gefällte Perpendikel BP und dessen Centriwinkel der Winkel PBP_1 ist, wenn P_1 den Fusspunkt des von B auf l_1 gefällten Perpendikels bedeutet. Da hiernach auch der Winkel PBP_1 den Drehungswinkel der Ebene der rollenden Linie um B angibt, so muss $\angle PBP_1 = \angle C_1 BC$ sein. In die dritte Lage $A_2 B_2 C_2 D_2 E_2 F_2$ gelangt die gebrochene Linie durch Drehung um den Punkt C_1, deren Grösse durch $\angle D_1 CD_2$ angegeben wird und wodurch die Linie $C_1 D_1$ an die Stelle von CD und l_1 in die Lage l_2 kommt. Hierbei umhüllt l_1 wieder einen Kreisbogen mit dem Centrum C_1, dem Radius $MC = M_1 C$ und dem Centriwinkel $MCM_1 = \angle D_1 CD_2$, vorausgesetzt, dass MC und $M_1 C$ die von C auf l_1 resp. l_2 gefällten Perpendikel sind. Durch Drehung um D gelangt die gebrochene Linie in die vierte Lage, wobei die einhüllende Gerade wieder einen Kreisbogen umhüllt u. s. w.

Die Rollcurve $PP_1 MM_1 NN_1 \ldots$ besteht also in unserem Falle aus einer Reihe von Kreisbögen, deren Endpunkte durch gemeinschaftliche Tangenten verbunden sind. Die Centren der Kreisbögen sind der Reihe nach die aufeinander folgenden Eckpunkte des festen Polygons, ihre Centriwinkel

die Ergänzungen der beiden am Centrum zusammentreffenden Winkel der gebrochenen Linien zu 4 R. Denkt man sich die Strecken beider gebrochenen Linien unendlich abnehmend und ihre Richtung sich stetig ändernd, sodass sie also zu Curven werden, so rücken die Bogen sehr nahe zusammen und ihre Centriwinkel werden unendlich klein. Die Rollcurve lässt sich alsdann als Einhüllende jener Kreisbögen auffassen, und ihre Gleichung kann man daher auf bekannte Weise finden, sobald die Gleichung der Kreisbögen gegeben ist.

Um letztere aufstellen zu können, mögen die Basis und die rollende Curve durch ihre Gleichungen in rechtwinkligen Coordinaten gegeben sein, und zwar seien

ξ, η die Coordinaten der Basis,

u, v „ „ „ rollenden Curve.

Wir nehmen dabei an, dass die Gleichung der rollenden Curve auf ein Coordinatensystem bezogen sei, dessen Axe der u mit der einhüllenden Geraden zusammenfalle.

Stellt uns also in *Fig. 2* die Linie AQB die Basis, und die Linie FQC die rollende Curve in irgend einer Lage, die Basis in Q berührend, dar, und ist FC die einhüllende Gerade, so sei $QP = v$, $QS = \eta$, $OS = \xi$. Hierbei muss, wie aus der vorhergegangenen Betrachtung sich ergibt, Q der Mittelpunkt und QP der Radius eines der Kreise sein, deren Einhüllende die gesuchte Rollcurve ist. Bezeichnen wir nun die Coordinaten von P (bezogen auf die Coordinatenaxen der Basis) mit x, y, sodass $QR = x$, $PR = y$, so ist demnach

I) $$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = v^2$$

die Gleichung jenes Kreises. Dieselbe enthält jedoch, nachdem man in derselben η durch ξ ausgedrückt hat, noch zwei veränderliche Parameter, nämlich ξ und v. Um einen von ihnen eliminiren zu können haben wir eine weitere

Gleichung zwischen ξ und v aufzustellen. Dieselbe ergibt sich durch folgende Ueberlegung: Stellt uns die Curve $F_0 Q_0 C_0$ die Anfangslage der rollenden Linie dar und fällt hierbei der dem Punkte F entsprechende Punkt F_0 mit A zusammen, so muss $arc\, QA = arc\, FQ$ sein, oder

$$\text{II)} \qquad \int \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = \int \sqrt{du^2 + dv^2}$$

Drückt man in dieser Gleichung vermöge der gegebenen Gleichungen der rollenden Curve und der Basis, u durch v und η durch ξ aus, so enthält sie nur noch ξ und v; sie kann also dann dazu dienen, um in I) einen der willkürlichen Parameter zu eliminiren. Nachdem dies geschehen, lässt sich die Gleichung der eingehüllten Rollcurve nach bekannter Methode aus Gleichung I) finden, indem man letztere nämlich partiell nach dem restirenden willkürlichen Parameter differenzirt und dann denselben mit Hülfe der so entstehenden Gleichung aus I) eliminirt. Wir heben noch speziell hervor, dass in der Eliminationsgleichung

x, y die Coordinaten der eingehüllten Rollcurve

darstellen. Beispiele für diese Methode der Bestimmung der eingehüllten Rollcurve finden sich in VI unter Nr. 11 und Nr. 12.

II. Bestimmung der Differentialgleichung der eingehüllten Rollcurve.

Die in den Gleichungen I) und II) ausgedrückten Beziehungen zwischen x, y, v, ξ lassen sich auch sehr einfach durch Differentialgleichungen darstellen. Dieselben bieten zugleich den Vortheil, dass sie nicht allein gestatten, bei gegebener Basis und gegebener rollender Curve die eingehüllte Rollcurve zu finden, sondern auch die umgekehrten Aufgaben zu lösen.

In *Fig.* 2 ist, wie aus dem vorhergehenden Abschnitt hervorgeht, die einhüllende Gerade FC sowohl Tangente an die eingehüllte Rollcurve im Punkte P, als auch an den eingehüllten Kreis, dessen Centrum Q und dessen Radius QP ist. Es muss daher QP senkrecht auf FC stehen, also ist:

$$\angle PUR = \angle QPR$$

mithin $tang\, PUR = tang\, QPR$, d. h.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - \xi}{y - \eta}$$

Setzen wir einmal den aus dieser Gleichung sich ergebenden Werth von $y-\eta$, das andere Mal den daraus folgenden Werth von $x-\xi$ in I) ein, so ergeben sich folgende beiden Gleichungen, in welchen wir zur Abkürzung

$$\frac{dy}{dx} = p$$

gesetzt haben:

III)
$$\begin{cases} x - \xi = \mp \dfrac{vp}{\sqrt{1+p^2}} \\ y - \eta = \mp \dfrac{v}{\sqrt{1+p^2}} \end{cases}$$

Aus Gleichung I) folgt ferner, wenn wir sie partiell nach ξ differenziren:

$$x - \xi + (y-\eta)\frac{d\eta}{d\xi} + v\frac{dv}{d\xi} = o$$

und aus II) ergibt sich:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dv}\right)^2}\, dv = \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}\, d\xi$$

daher ist:

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dv}\right)^2}}$$

Führt man diesen Werth von $\frac{dv}{d\xi}$ in die aus I) hervorgegangene Differentialgleichung ein, so erhält man:

$$\left[x-\xi+(y-\eta)\frac{d\eta}{d\xi}\right]\sqrt{1+\left(\frac{du}{dv}\right)^2}+v\sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}=o$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\eta',\ \frac{dv}{du}=v',$$

so können wir der letzten Gleichung auch folgende Form geben:

$$\frac{x-\xi+(y-\eta)\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}}+\frac{vv'}{\sqrt{1+v'^2}}=o$$

Diese aus der Verbindung der Gleichungen I) und II) hervorgegangene Differentialgleichung lässt sich noch mehr vereinfachen, wenn wir die Gleichungen III) zu Hülfe nehmen. Setzen wir nämlich die Werthe für $x-\xi$ und $y-\eta$ aus denselben in die letzte Gleichung, nachdem beide Seiten derselben quadrirt sind, ein, so resultirt:

$$\frac{v^2(p-\eta')^2}{(1+\eta'^2)(1+p^2)}=\frac{v^2v'^2}{1+v'^2},$$

was man, nachdem durch v^2 auf beiden Seiten dividirt ist, folgendermassen umformen kann:

$$\begin{aligned}
(p-\eta')^2(1+v'^2)&=v'^2(1+\eta'^2)(1+p^2)\\
(p-\eta')^2+v'^2(p^2-2p\eta'+\eta'^2)&=v'^2(1+\eta'^2+p^2+\eta'^2p^2)\\
(p-\eta')^2&=v'^2\ (1+2p\eta'+\eta'^2p^2)\\
&=v'^2\ (1+\eta'p)^2\\
\pm(p-\eta')&=v'\ (1+\eta'p)\ \text{oder endlich:}
\end{aligned}$$

$$\text{IV)}\qquad \pm v'=\frac{p-\eta'}{1+\eta'p}$$

Die Differentialgleichungen III) und IV), die wir statt der Gleichungen I) und II) anwenden können, sind ausreichend, um bei gegebener Basis und gegebener rollender Curve die eingehüllte Rollcurve zu bestimmen. Denn in

denselben lassen sich mit Hülfe der Gleichungen der gegebenen Curven die veränderlichen Grössen η und u durch ξ und v ausdrücken, sodass sie nur noch x, y, p, ξ, v enthalten. Eliminirt man nun aus den drei Gleichungen ξ und v, so erhält man eine einzige Gleichung mit x, y, p, welche die Differentialgleichung der gesuchten Rollcurve ist.

Umgekehrt können die Gleichungen III) und IV) zur Bestimmung der rollenden Curve dienen, falls die Basis und die eingehüllte Rollcurve durch ihre Gleichungen gegeben sind. Wenn man nämlich dann vermittelst der gegebenen Curvengleichungen die Grössen x und p durch y, ferner ξ und η' durch η ersetzt, enthalten jene drei Gleichungen nur noch v, v', y, η. Nach Elimination der beiden letzten dieser Grössen bleibt eine Differentialgleichung mit v und v' übrig, deren Integration die Gleichung der rollenden Curve ergibt.

Ferner kann man, bei gegebener rollender Curve, die Basis bestimmen, auf der erstere sich bewegen muss, damit eine mit ihr festverbundene Gerade eine gegebene Curve einhülle. Zu diesem Zwecke hat man zunächst in den drei Gleichungen III) und IV) p, y als Funktionen von x und v, v' als Funktionen von u darzustellen, sodass nur noch ξ, η, x, u in denselben vorkommen. Dann eliminirt man aus ihnen x und u und erhält eine einzige Gleichung zwischen ξ, η, η', welche die Differentialgleichung der Basis ist.

Die Richtigkeit der Gleichungen III) und IV), die als Grundlage der späteren Untersuchungen dienen, lässt sich sehr einfach unmittelbar an *Fig.* 2 nachweisen. Da nämlich $PQ = v$ senkrecht auf der einhüllenden Geraden PU steht, ist

$$tang\, NPQ = tang\, PUX = \frac{dy}{dx} = p,$$

folglich ist

$$\sin NPQ = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$\cos NPQ = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

Setzt man diese Werthe in die unmittelbar aus der Figur sich ergebenden Gleichungen

$$\xi - x = v \sin NPQ$$
$$y - \eta = v \cos NPQ$$

ein, so erhält man

$$x - \xi = -\frac{vp}{\sqrt{1+p^2}}, \quad y - \eta = +\frac{v}{\sqrt{1+p^2}}$$

was mit III) übereinstimmt.

Bezeichnen wir mit φ den Winkel, den die einhüllende Gerade und die gemeinschaftliche Tangente QT der rollenden Curve und der Basis mit einander bilden, so ist

$$\varphi = 90^0 - \angle PQT = 90^0 - (\angle PQN + \angle NQT)$$

Da nun $\angle PQN = 90^0 - \angle NPQ$ und $\angle NQT = \angle QTX$ ist, so hat man

$$\varphi = 90^0 - (90^0 - \angle NPQ + \angle QTX)$$
$$= \angle NPQ - \angle QTX$$

Folglich ist

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{tang} NPQ - \operatorname{tang} QTX}{1 + \operatorname{tang} NPQ . \operatorname{tang} QTX}$$

d. h.:

$$v' = \frac{p - \eta'}{1 + p\eta'}$$

welche Gleichung mit IV) identisch ist.

Bewegt sich die rollende Curve auf der Innenseite der Basis, so erhält man dieselben Gleichungen, nur wird das Vorzeichen von v das entgegengesetzte. Es lehrt uns also diese geometrische Betrachtung, dass in den Formeln III) und IV) das obere oder das untere Vorzeichen zu wählen ist,

je nachdem die rollende Curve sich auf der convexen oder der concaven Seite der Basis bewegt.

Wir gehen nun dazu über, die Formeln III) und IV) auf spezielle Fälle anzuwenden.

III. Die Basis ist eine Gerade.

Ist die Basis eine Gerade, so lautet, falls wir dieselbe zur Axe der ξ wählen, ihre Gleichung:

$$\eta = o$$

Die Gleichungen III) und IV) gehen also dann in die folgenden über:

V) $$y = \frac{v}{\sqrt{1+p^2}}; \quad v' = p,$$

wobei blos ein Vorzeichen von v berücksichtigt worden ist, da ein Unterschied zwischen beiden Seiten der Basis in unserem Falle nicht besteht.

Wir wenden diese Formeln zur Lösung folgender Aufgaben an:

1. Ein Kreis rollt auf einer Geraden, man sucht die von seinem Durchmesser umhüllte Curve.

Bezeichnen wir mit r den Radius des Kreises, so ist die Gleichung der rollenden Curve, wenn wir den Durchmesser zur Axe der u wählen:

$$u^2 + v^2 = r^2$$

Hieraus folgt:

$$v' = -\frac{u}{v} = -\frac{\sqrt{r^2-v^2}}{v}$$

Die Gleichungen V) werden daher:

$$y = \frac{v}{\sqrt{1+p^2}}, \quad -\frac{\sqrt{r^2-v^2}}{v} = p$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist v zu eliminiren. Die letztere liefert:

$$v = \frac{r}{\sqrt{1+p^2}}$$

Hiernach wird die erste Gleichung:

$$y = \frac{r}{1+p^2}$$

Löst man diese Differentialgleichung der eingehüllten Curve nach p auf, so erhält man:

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{r-y}{y}}$$

also ist:

$$x + const = \int \sqrt{\frac{y}{r-y}}\, dy$$

$$= -\sqrt{ry - y^2} + \frac{r}{2} arc\cos \frac{y - \frac{r}{2}}{\frac{r}{2}}$$

woraus ersichtlich ist, dass die eingehüllte Rollcurve eine Cycloide ist, deren erzeugender Kreis den Radius $\frac{r}{2}$ besitzt.

2. Man soll die Curve bestimmen, welche von der einen Asymptote einer logarithmischen Linie eingehüllt wird, wenn letztere auf einer Geraden rollt.

Die Gleichung der logarithmischen Linie ist, falls wir die einhüllende Gerade zur Axe der u wählen:

$$v = ae^{\frac{u}{a}}, \text{ also ist}$$

$$v' = e^{\frac{u}{a}} = \frac{v}{a}$$

Setzen wir diesen Werth von v' in die zweite der Gleichungen V) ein, so erhalten wir:

$$\frac{v}{a} = p \text{ also}$$

$$v = ap$$

Hiernach wird die erste der Gleichungen V):

$$y = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$$

Nach p aufgelöst ergibt dieselbe:

$$p = \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}, \text{ daher ist}$$

$$x = \int \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\, dy + const.$$

oder:

$$x = \sqrt{a^2-y^2} - a\, l\, \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} + const.,$$

eine Gleichung die identisch ist mit der Gleichung

$$x = \sqrt{a^2-y^2} - \frac{a}{2} l\, \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{a-\sqrt{a^2-y^2}} + const.$$

und daher die Traktorie der Geraden darstellt.

3. Es soll die Curve gesucht werden, welche auf einer geradlinigen Basis rollen muss, damit eine in der Ebene der Curve liegende Gerade einen Kreis umhüllt, der die Basis berührt.

Ist a der Radius des eingehüllten Kreises, so ist die Gleichung desselben, da wir die Basis zur Abscissenaxe wählen:

$$x^2 + (y-a)^2 = a^2$$

Hieraus folgt:

$$y = a \mp \sqrt{a^2-x^2},\ p = \pm \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Substituirt man diese Werthe von y und p in die Gleichungen V), so erhält man für die erste:

$$a \pm \sqrt{a^2-x^2} = \pm \frac{v\sqrt{a^2-x^2}}{a} \text{ oder}$$

$$\pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + a = +v$$

und für die zweite:

$$v' = \mp \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Aus der letztern folgt:

$$x = \pm \frac{a v'}{\sqrt{1 + v'^2}}$$

Für diesen Werth von x geht die vorletzte Gleichung über in:

$$\pm a \sqrt{1 + v'^2} + a = v$$

Diese Differentialgleichung der gesuchten Curve nach v aufgelöst ergibt:

$$v' = \frac{dv}{du} = \frac{\sqrt{(v-a)^2 - a^2}}{a}$$

also ist:

$$u + const = \int \frac{a\,dv}{\sqrt{(v-a)^2 - a^2}}$$

oder:

$$u = a\,l\,\frac{(v-a) + \sqrt{(v-a)^2 - a^2}}{c}$$

wobei $const = a\,l\,c$ gesetzt worden ist. Hat die rollende Curve eine solche Anfangslage, dass ihre Coordinatenaxen mit denjenigen der Basis zusammenfallen, dass also die einhüllende Gerade den Kreis im Coordinatenanfang berührt, so muss für $u = o$ entweder $v = o$ oder $v = 2a$ werden. Wählen wir $u = o$ und $v = 2a$ als zusammengehörige Werthe, so ergibt sich $c = a$. Wir können dann die letzte Gleichung auch in der folgenden Form schreiben:

$$v - a = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}\right)$$

Die gesuchte Curve ist demnach eine Kettenlinie mit dem Parameter a und die einhüllende Gerade (die Abscissenaxe) ist die im Abstande $2a$ zur Scheiteltangente der Kettenlinie gezogene Parallele.

4. Welche Curve muss auf einer Geraden rollen, wenn eine in der Ebene derselben liegende Gerade eine Kettenlinie umhüllen soll?

Die Gleichung der eingehüllten Kettenlinie sei:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

so ist:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a}$$

Da hiernach $\sqrt{1 + p^2} = \frac{y}{a}$ ist, so gehen die Gleichungen V) in die folgenden über:

$$y = \frac{av}{y} \qquad v' = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a}$$

Aus der ersten Gleichung folgt: $y^2 = av$, und führen wir diesen Werth in die zweite Gleichung ein, so erhält man als Differentialgleichung der rollenden Curve:

$$v' = \frac{\sqrt{av - a^2}}{a}$$

also ist:

$$u = \int \frac{a\,dv}{\sqrt{av - a^2}} + const.$$

$$= 2\sqrt{av - a^2} + const.$$

Wählen wir auf der einhüllenden Geraden den Coordinatenanfang für die rollende Curve so, dass derselbe in der Anfangslage der Curve mit dem Scheitel der Kettenlinie zusammenfällt, so muss der Punkt $u = o$, $v = a$ ein Punkt der Curve sein, mithin ist $const = o$ zu setzen. Statt der letzten Gleichung können wir daher schreiben:

$$u^2 = 4a(v - a)$$

Hiernach ist die gesuchte rollende Curve eine Parabel mit dem Parameter $2a$, und die einhüllende Gerade ist ihre Direktrix.

IV. Die einhüllende Gerade geht stets durch einen festen Punkt.

Soll die eingehüllte Curve ein Punkt mit den Coordinaten a und b sein, so ist in den Gleichungen III) und IV) $x = a$ und $y = b$ zu setzen. Man erhält auf diese Weise:

$$a - \xi = \mp \frac{vp}{\sqrt{1+p^2}} \qquad b - \eta = \pm \frac{v}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$\pm v' = \frac{p - \eta'}{1 + \eta' p}$$

Aus diesen drei Gleichungen ist noch p, welches einen unbestimmten Werth besitzt, zu eliminiren. Aus der letzten Gleichung folgt nun:

$$p = \frac{\pm v' + \eta'}{1 \mp v'\eta'}$$

Bildet man einmal den Quotienten, das andere Mal die Quadratsumme der beiden ersten Gleichungen, so erhält man:

VI)
$$\begin{cases} \dfrac{\eta - b}{\xi - a} = -\dfrac{1}{p} = -\dfrac{1 \mp v'\eta'}{\pm v' + \eta'} \\ (\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 = v^2 \end{cases}$$

Für den speziellen Fall, dass die einhüllende Gerade stets durch den Coordinatenanfang gehen soll, ist $a = b = o$ zu setzen. Die Formeln VI) gehen dann in die folgenden über:

VIa)
$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 = v^2 \\ \dfrac{\eta}{\xi} = -\dfrac{1 \mp v'\eta'}{\pm v' + \eta'} \end{cases}$$

Die letzten Gleichungen erhalten eine sehr einfache Gestalt, wenn man an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten ξ, η Polarcoordinaten einführt.

Für $\xi = r\cos\vartheta$, $\eta = r\sin\vartheta$,

also:

$$\eta' = \frac{r'\sin\vartheta + r\cos\vartheta}{r'\cos\vartheta - r\sin\vartheta}, \quad \left(r' = \frac{dr}{d\vartheta}\right)$$

werden dieselben:

$$\text{VIb)} \qquad \begin{cases} r = \pm v \\ \frac{r'}{r} = \pm v' \end{cases}$$

Angenommen nun, wir hätten für die gegebene Basis $r = f_1(\vartheta)$ mit Hülfe der Gleichungen VIb) die Curve $u = f_2(v)$ gefunden von der Eigenschaft, dass wenn letztere auf der ersten rollt, die Axe der u der zweiten Curve stets durch den Pol der ersten Curve geht, so besteht zwischen diesen beiden Linien noch eine weitere merkwürdige Beziehung.

Es ist nämlich von Interesse, die Basis zu suchen, auf welcher die erste Curve rollen muss, damit ihr Pol die Axe der u (die einhüllende Gerade) der zweiten Curve, welche wir uns jetzt festliegend denken, durchläuft. Die Bestimmung dieser Basis geschieht mit Hülfe folgender Gleichungen (s. Schlömilch, Uebungsbuch z. St. d. höheren Anal., II. § 43), die wir als bekannt voraussetzen:

$$x_1 - \xi_1 = \mp \frac{r_1 y_1'}{\sqrt{1 + y_1'^2}}; \; y_1 - \eta_1 = \pm \frac{r_1}{\sqrt{1 + y_1'^2}}$$

$$\pm \frac{r_1}{r_1'} = \frac{1 + y_1' \eta_1'}{y_1' - \eta_1'}$$

worin:

$\xi_1 \eta_1$ die rechtwinkligen Coordinaten der Basis,

$r_1 \vartheta_1$ die Polarcoordinaten der rollenden Curve, vorausgesetzt dass man den die Rollcurve beschreibenden Punkt zum Pol gewählt hat,

$x_1 y_1$ die rechtwinkligen Coordinaten der Rollcurve, bezogen auf das Axensystem der Basis

bedeuten, und wobei zur Abkürzung

$$\frac{d y_1}{d x_1} = y_1', \; \frac{d r_1}{d \vartheta_1} = r_1', \; \frac{d \eta_1}{d \xi_1} = \eta_1'$$

gesetzt worden ist.

In unserem Falle haben wir r_1, ϑ_1 durch r, ϑ zu ersetzen und da die Gleichung der Rollcurve

$$y_1 = o$$

ist, woraus folgt $y_1' = o$, so gehen obige Formeln über in

$$-\eta_1 = \pm r; \pm \frac{r}{r'} = \frac{1}{-\eta_1'}$$

oder

$$\begin{cases} \mp r = \eta_1 \\ \mp \frac{r'}{r} = \eta_1' \end{cases}$$

Berechnet man aus beiden Gleichungen, indem man r eliminirt, die Gleichung der Basis, so erhält man dieselbe Beziehung zwischen η_1 und ξ_1, die aus den Gleichungen VIb) für u und v resultirte, d. h. die Gleichung der Basis ist, abgesehen von der Bezeichnung der Coordinaten, identisch mit der Gleichung $u = f_2(v)$. Damit also der Pol der Curve $r = f_1(\vartheta)$ die Abscissenaxe der Curve $u = f_2(v)$ durchlaufe, hat erstere auf der letzteren zu rollen. Das gefundene Resultat lässt sich in folgendem Satze aussprechen:

Rollt eine Curve auf einer anderen Curve und ein Punkt in der Ebene der ersten Curve durchläuft dabei eine Gerade in der Ebene der zweiten Curve, so geht, falls die erste Curve fest ist und die zweite Curve auf ihr rollt, jene Gerade in der Ebene der zweiten Curve stets durch den erwähnten Punkt der ersten Curve.

Beispiele:

5. Es soll die Curve bestimmt werden, welche auf einer hyperbolischen Spirale rollen muss, damit eine Gerade in der Ebene der ersteren stets durch den Pol der Spirale geht.

Die Gleichung der Basis ist

$$r = \frac{a}{\vartheta}$$

folglich $r' = -\frac{a}{\vartheta^2}$ und $\frac{r'}{r} = -\frac{1}{\vartheta} = -\frac{r}{a}$.

Für diesen Werth gehen die Gleichungen VIb) über in

$$\begin{cases} r = v \\ -\frac{r}{a} = v' \end{cases}$$

Wegen der ersten dieser Gleichungen wird die letzte:

$$-\frac{v}{a} = v' \quad \text{oder}$$

$$-du = \frac{a\,dv}{v} \text{ mithin}$$

$$-u = a\,l\,\frac{v}{c} \qquad (c = const.)$$

Man ersieht hieraus, dass die gesuchte Curve eine logarithmische Linie ist.

6. Man sucht die Curve, auf welcher die Tractorie der Geraden rollen muss, damit die Asymptote der letzteren stets durch einen festen Punkt in der Ebene der ersteren geht.

Wenn man die Asymptote zur Abscissenaxe wählt, ist die Gleichung der Tractorie der Geraden:

$$u = \frac{1}{2}\,a\,l\,\frac{a + \sqrt{a^2 - v^2}}{a - \sqrt{a^2 - v^2}} - \sqrt{a^2 - v^2}$$

Hieraus ergibt sich

$$v' = -\frac{v}{\sqrt{a^2 - v^2}}$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichungen VIb), so werden dieselben:

$$\begin{cases} r = v \\ \frac{r'}{r} = -\frac{v}{\sqrt{a^2 - v^2}} \end{cases}$$

Eliminirt man aus der letzten Gleichung v mit Hülfe der ersten, so erhält man:

$$r' = \frac{r^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} \text{ oder}$$

$$\vartheta + \gamma = \int \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r^2}\, dr \qquad (\gamma = const.)$$

oder endlich

$$\vartheta + \gamma = -\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} + arc\cos\frac{r}{a}$$

Die gesuchte Basis ist daher die Tractorie des Kreises.

7. Auf welcher Curve muss ein Kegelschnitt rollen, damit die Axe desselben stets durch einen festen Punkt geht?

Als Gleichung des Kegelschnitts haben wir, wenn wir seine Scheiteltangente zur Ordinatenaxe machen, zu setzen:

$$v^2 = 2hu + ku^2$$

Hierin ist h die Ordinate im Brennpunkt des Kegelschnitts und $k = \varepsilon^2 - 1$, falls wir mit ε die numerische Excentricität bezeichnen.

Aus der Gleichung der Curve folgt:

$$v' = \frac{h + ku}{\pm\sqrt{2hu + ku^2}}$$

Die Gleichungen VIb) werden hiernach:

a) $$r = \pm\sqrt{2hu + ku^2}$$

b) $$\frac{r'}{r} = \frac{h + ku}{\pm\sqrt{2hu + ku^2}}$$

Vermöge a) können wir statt b) auch schreiben:

$$r' = h + ku$$

woraus sich ergibt

$$u = \frac{r' - h}{k}$$

Da nun aus a) folgt:

$$u = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 + kr^2}}{k}$$

so erhält man, indem man beide Werthe von u gleichsetzt:

$$r' = \pm \sqrt{h^2 + kr^2}$$

Daher ist

c) $$\vartheta = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{h^2 + kr^2}} + const.$$

Diese Gleichung liefert uns die gesuchte Basis für die Ellipse mit den Halbaxen a und b, wenn wir

$$h = \frac{b^2}{a}; \; k = \varepsilon^2 - 1 = -\frac{b^2}{a^2}$$

setzen. Man erhält dann:

$$\vartheta = \pm \frac{a}{b} \int \frac{dr}{\sqrt{b^2 - r^2}} + const.$$

oder

$$\vartheta = \pm \frac{a}{b} \, arc\,sin \frac{r}{b} + const.$$

Soll die Axe des Kegelschnittes in der primitiven Lage desselben mit der Polaraxe der Basis sich decken, so muss für $\vartheta = o$, $r = o$ sein, woraus folgt dass $const = o$ ist. Die Gleichung der gesuchten Basis wird dann

$$\vartheta = \pm \frac{a}{b} \, arc\,sin \frac{r}{b}$$

$$r = b \, sin \pm \frac{b}{a} \, \vartheta.$$

Die hierdurch dargestellte Curve besteht aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl vom Coordinatenanfang ausgehender Schleifen, je nachdem das Verhältniss $\frac{b}{a}$ rational oder irrational ist.

Setzen wir in der Gleichung c)

$$h = \frac{b^2}{a}, \; k = \varepsilon^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$$

so stellt uns die entstehende Gleichung

$$\vartheta = \pm \frac{a}{b} \int \frac{dr}{\sqrt{b^2 + r^2}}$$

die gesuchte Basis für eine Hyperbel mit den Halbaxen a und b dar. Die Ausführung der Integration ergibt

$$\vartheta = \pm \frac{a}{b} l \frac{r + \sqrt{b^2 + r^2}}{c} \qquad (const = - l c)$$

Soll wieder für $\vartheta = o$ auch $r = o$ sein, so muss $c = b$ werden. Dann ist

$$\vartheta = \pm \frac{a}{b} l \frac{r + \sqrt{b^2 + r^2}}{b}$$

Diese Gleichung lässt sich noch weiter umformen:

$$e^{\pm \frac{b}{a}\vartheta} = \frac{r + \sqrt{b^2 + r^2}}{b}$$

$$\sqrt{b^2 + r^2} = b e^{\pm \frac{b}{a}\vartheta} - r$$

Quadrirt man diese Gleichung auf beiden Seiten, so folgt schliesslich nach einigen Vereinfachungen:

$$r = \frac{b}{2} \left(e^{\pm \frac{b}{a}\vartheta} - e^{\mp \frac{b}{a}\vartheta} \right) \text{ oder}$$

$$r = \pm \frac{b}{2} \left(e^{\frac{b}{a}\vartheta} - e^{-\frac{b}{a}\vartheta} \right)$$

Die Curve lässt sich leicht mittelst der beiden congruenten aber in entgegengesetztem Sinn gewundenen logarithmischen Spiralen

$$u_1 = \frac{b}{2} e^{\frac{b}{a}\vartheta}, \; u_2 = \frac{b}{2} e^{-\frac{b}{a}\vartheta}$$

construiren, wenn wir deren Polaraxen zusammenlegen. Der zum Winkel ϑ gehörige Radius-Vektor der Curve ist dann nämlich gleich der Differenz der zu demselben Polarwinkel gehörigen Radien-Vektoren der Spiralen.

Um schliesslich die gesuchte Basis für die Parabel zu finden, haben wir in Gleichung c)

$$k = \varepsilon^2 - 1 = o$$

zu setzen. Dann wird

$$\vartheta = \pm \frac{1}{h} \int dr + const$$

$$= \pm \frac{r}{h} + const.$$

Wenn für $\vartheta = o$ $r = o$ werden soll, so muss $const = o$ sein. Die letzte Gleichung nimmt dann die Form an:

$$r = \pm h\vartheta,$$

woraus ersichtlich, dass die Basis durch zwei sich deckende, archimedische Spiralen dargestellt wird.

8. Welche Curve muss auf einem Kegelschnitt rollen, wenn eine Gerade in der Ebene derselben stets durch den Brennpunkt des Kegelschnitts gehen soll?

Die Polargleichung der Basis ist in diesem Falle:

$$r = \frac{h}{1 + \varepsilon \cos\vartheta}$$

wobei h und ε dieselbe Bedeutung wie in der vorhergehenden Aufgabe besitzen.

Es ist also

$$r' = \frac{-h\varepsilon \sin\vartheta}{(1 + \varepsilon \cos\vartheta)^2} = -\frac{r^2 \varepsilon \sin\vartheta}{h}$$

Da nun nach der Gleichung des Kegelschnitts

$$\cos\vartheta = \frac{h - r}{\varepsilon r}$$

mithin

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)r^2 + 2hr - h^2}}{\varepsilon r}$$

ist, so wird

$$r' = -\frac{r\sqrt{\varepsilon^2 - 1)r^2 + 2hr - h^2}}{h}$$

Setzen wir diesen Werth in die Gleichungen VIb) ein, so ist

$$\begin{cases} r = v \\ -\dfrac{\sqrt{(\varepsilon^2-1)r^2+2hr-h^2}}{h} = v' \end{cases}$$

Eliminirt man r aus beiden Gleichungen, so erhält man

$$v' = -\frac{\sqrt{(\varepsilon^2-1)v^2+2hv-h^2}}{h} \text{ oder}$$

$$\alpha) \qquad u = -h\int \frac{dv}{\sqrt{(\varepsilon^2-1)v^2+2hv-h^2}} + const.$$

Führen wir in diese Gleichung die speziellen Werthe von h und ε ein, so liefert uns dieselbe die gesuchten rollenden Curven für jede Art der Kegelschnitte.

Ist der Kegelschnitt eine Ellipse mit den Halbaxen a und b, so ist

$$p = \frac{b^2}{a},\ \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

zu setzen.

Für diese Werthe geht α) über in:

$$u = -b\int \frac{dv}{\sqrt{c^2-(v-a)^2}} + const.$$

$$= b\,arc\,cos\,\frac{v-a}{c} + const.$$

Berührt die gesuchte rollende Curve in ihrer Anfangslage die Ellipse in demjenigen Scheitel, welcher die grösste Entfernung vom eingehüllten Brennpunkt hat, und steht dabei die einhüllende Gerade senkrecht auf der Axe des Kegelschnitts, so muss für $u = o$ $v = a + c$ sein. Daraus folgt: $const = o$, mithin ist

$$u = b\,arc\,cos\,\frac{v-a}{c}$$

oder

$$v = a + c\,cos\,\frac{u}{b}$$

Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, so hat man

$$p = \frac{b^2}{a},\ \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

in α) einzusetzen und erhält dann:

$$u = -b \int \frac{dv}{\sqrt{(v+a)^2 - c^2}} + const.$$

$$= b\, l\, (v + a + \sqrt{(v+a)^2 - c^2}) + const.$$

Hat die rollende Curve eine solche Anfangslage, dass sie den Scheitel der Hyperbel berührt und steht dabei die einhüllende Gerade senkrecht auf der Axe der Hyperbel, so muss für $u = o$ $v = c - a$ sein. Hiernach muss $const = -b\, l\, c$ sein, und daher ist die Gleichung der Curve

$$u = b\, l\, \frac{v + a + \sqrt{(v+a)^2 - c^2}}{c}$$

Löst man diese Gleichung nach v auf, so erhält man

$$v + a = \frac{c}{2}\left(e^{+\frac{u}{b}} + e^{-\frac{u}{b}}\right)$$

Wenn schliesslich der Kegelschnitt eine Parabel ist, so hat man in α) $\varepsilon = 1$ zu setzen und erhält nach Ausführung der Integration:

$$u = \sqrt{2hv - h^2} + const.$$

Für den Fall, dass die rollende Curve in ihrer Anfangslage den Scheitel der Parabel berührt und dass zugleich die einhüllende Gerade senkrecht auf der Parabelaxe steht, muss für $u = o$ $v = \frac{h}{2}$ und daher $const = o$ sein. Obige Gleichung wird daher

$$u^2 = 2hv - h^2$$

Dieses ist die Gleichung einer Parabel mit der Brennpunktordinate h, wenn die Direktrix zur Axe der u gewählt wird. Es hat also auf der gegebenen Parabel eine ihr

congruente Parabel zu rollen, dann wird die Direktrix der letzteren stets durch den Brennpunkt der ersteren gehen.

Nach dem zu Anfang dieses Abschnitts abgeleiteten Satze wird der Brennpunkt der ersten Parabel, falls letztere auf der zweiten Parabel rollt, die Direktrix dieser anderen Parabel durchlaufen. Da beide Parabeln congruent sind, so gilt das, was von der ersten behauptet ist, auch von der zweiten, und wir gelangen so zu dem Ergebniss:

Wenn eine Parabel auf einer ihr congruenten so rollt, dass sie sich dabei einmal in ihren Scheitelpunkten berühren, so geht die Direktrix der rollenden Parabel stets durch den Brennpunkt der festen und zugleich durchläuft der Brennpunkt der rollenden Parabel die Direktrix der festen.

V. Die rollende Curve ist eine Gerade.

Rollt auf der Basis eine Gerade, die von der einhüllenden Geraden unter einem Winkel α geschnitten wird, so ist die Gleichung der rollenden Curve, wenn wir $tang\,\alpha = m$ setzen:

$$v = mu$$

also

$$v' = m$$

Für diese Werthe gehen die Gleichungen III) und IV) in die folgenden über:

$$x - \xi = \mp \frac{mup}{\sqrt{1+p^2}} \qquad y - \eta = \pm \frac{mu}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$m = \frac{p - \eta'}{1 + \eta' p}$$

Eliminirt man aus den ersten Gleichungen $\frac{mu}{\sqrt{1+p^2}}$, so hat man zur Bestimmung der eingehüllten Rollcurve die Formeln:

VII)
$$\begin{cases} x - \xi + p(y - \eta) = o \\ m(1 + \eta' p) = p - \eta' \end{cases}$$

Beispiele.

9. Eine Ebene ist so in Bewegung, dass eine in ihr liegende Gerade ohne zu gleiten auf der Peripherie eines Kreises sich fortbewegt. Es soll die Curve bestimmt werden, welche eine zweite Gerade der Ebene umhüllt.

Als Gleichung der Basis haben wir in diesem Falle zu setzen, wenn a der Radius derselben ist:

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2$$

wofür wir auch folgende Gleichungen anwenden können:

$$\xi = a \cos \vartheta; \ \eta = a \sin \vartheta.$$

Da hiernach

$$d\eta = a \cos \vartheta \, d\vartheta; \ d\xi = - a \sin \vartheta \, d\vartheta,$$

so ist

$$\eta' = - tang \vartheta$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen VII) ein, so erhält man:

a) $$x - a \cos \vartheta + p(y - a \sin \vartheta) = o$$

b) $$m(1 - p \, tang \vartheta) = p + tang \vartheta$$

Aus b) folgt:

$$tang \vartheta = \frac{m - p}{1 + mp}$$

woraus sich ergibt:

$$\sin \vartheta = \frac{mp}{\sqrt{(1+m^2)(1+p^2)}}$$

$$\cos \vartheta = \frac{1 + mp}{\sqrt{(1+m^2)(1+p^2)}}$$

Für diese Werthe von $\sin \vartheta$ und $\cos \vartheta$ nimmt die Gleichung a) folgende Form an:

$$x + py - a \frac{1 + p^2}{\sqrt{(1+m^2)(1+p^2)}} = o$$

oder

c) $$x + py = a \sqrt{\frac{1+p^2}{1+m^2}}$$

Um das Integral dieser Differentialgleichung zu finden, differenziren wir sie zunächst. Setzt man dabei zur Abkürzung

$$\frac{a}{\sqrt{1+m^2}} = b$$

so erhält man:

$$\frac{dy}{p} + p\,dy + y\,dp = \frac{b\,p\,dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

oder

$$\frac{y\,p\,dp + (1+p^2)\,dy}{p} = \frac{b\,p\,dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

Multiplizirt man beide Seiten dieser Gleichung mit $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$:

$$\frac{y\,p\,dp + (1+p^2)\,dy}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{b\,p^2\,dp}{1+p^2},$$

so stellt uns die linke Seite $d(y\sqrt{1+p^2})$ dar. Die Integration ergibt daher:

$$y\sqrt{1+p^2} = b\,(p - arc\,tang\,p) + c$$

Für $p = tang\,\tau$ können wir diese Gleichung auch schreiben:

d) $$y = b\,(sin\,\tau - \tau\,cos\,\tau) + c\,cos\,\tau$$

Wenn man die gemachten Substitutionen und den Werth y aus d) in c) einführt, so erhält man:

e) $$x = b\,(cos\,\tau + \tau\,sin\,\tau) - c\,sin\,\tau$$

Die Elimination von τ aus d) und e) liefert die Gleichung der gesuchten Curve.

Um diese Elimination besser ausführen zu können, gehen wir mit Hülfe der Gleichungen

$$x = r\,cos\,\varphi \qquad y = r\,sin\,\varphi$$

von rechtwinkligen Coordinaten zu Polarcoordinaten über.

Die Summe der Quadrate beider Gleichungen liefert uns dann:

$$r^2 = b^2(1 + \tau^2) - 2bc\tau + c^2$$

woraus folgt:

f) $$\frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{b} = \tau - \frac{c}{b}$$

Dividirt man dagegen d) durch e) (nach der Transformation in Polarcoordinaten) und hebt den Quotienten auf der rechten Seite durch $b \cos \tau$, so erhält man:

$$tang\,\varphi = \frac{tang\,\tau - \left(\tau - \frac{c}{b}\right)}{1 + \left(\tau - \frac{c}{b}\right) tang\,\tau}$$

Hieraus folgt:

g) $$\tau - \frac{c}{b} = \frac{tang\,\tau - tang\,\varphi}{1 + tang\,\tau\, tang\,\varphi} = tang(\tau - \varphi)$$

Aus f) und g) ergibt sich:

$$tang(\tau - \varphi) = \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{b}$$

also ist

$$\tau - \varphi = arc\,tang\,\frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{b} = arc\cos\,\frac{b}{r}$$

Vermöge des Werthes von τ, der aus f) folgt, geht diese Gleichung über in:

$$\varphi + \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{b} - arc\cos\,\frac{b}{r}$$

Die eingehüllte Curve ist demnach die Evolvente eines Kreises, dessen Radius $= b = \frac{a}{\sqrt{1 + m^2}} = a \cos \alpha$ ist.

10. Auf welcher Curve muss eine Gerade rollen, damit eine die letztere schneidende Gerade stets durch einen festen Punkt in der Ebene der Curve geht?

Wählen wir den von der Geraden eingehüllten Punkt zum Anfang des Coordinatensystems in der festen Ebene, so ist in den Gleichungen VII) $x = o$, $y = o$ zu setzen. Dieselben gehen dann über in

$$\xi + p\eta = o$$
$$m(1 + \eta' p) = p - \eta'.$$

Aus diesen beiden Gleichungen hat man die unbestimmte Grösse p zu eliminiren. Aus der erstern folgt:

$$p = -\frac{\xi}{\eta}$$

mithin wird die zweite:

$$m\left(1 - \frac{\xi\eta'}{\eta}\right) = -\left(\frac{\xi}{\eta} + \eta'\right)$$

Da diese Differentialgleichung homogen ist, so lässt sie sich durch die Substitution

$$\frac{\eta}{\xi} = t,\ \eta' = \xi\frac{dt}{d\xi} + t$$

integriren. Hierfür geht sie über in:

$$\frac{m\xi}{t}\cdot\frac{dt}{d\xi} = \frac{1}{t} + \xi\frac{dt}{d\xi} + t$$

oder:

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{m - t}{1 + t^2}\,dt.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$l\frac{\xi}{c} = marctang\,t \quad - l(1 + t^2)$$
$$= marctang\frac{\eta}{\xi} - l\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

oder

$$l\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{c} = marctang\frac{\eta}{\xi}$$

Die Gleichung lautet in Polarcoordinaten für $\xi = r\cos\vartheta$, $\eta = r\sin\vartheta$:

$$l\,\frac{r}{c} = m\,\vartheta$$

oder

$$r = c\,e^{m\,\vartheta}$$

woraus ersichtlich, dass die verlangte Curve eine logarithmische Spirale ist.

VI. Beispiele zum allgemeinen Fall.

Wenn weder die Basis noch die rollende Curve eine Gerade und wenn die eingehüllte Curve nicht ein Punkt ist, so hat man entweder die Formeln I) und II) und die aus ihrer Eliminationsgleichung durch Differentiation abgeleitete dritte Gleichung, oder die drei Formeln III) und IV) zu benutzen. Die Anwendung der zuerst genannten Gleichungen ist dabei auf die Aufgaben beschränkt, in welchen die Basis und die rollende Curve gegeben sind und dieselben sich rektifiziren lassen. Ist dieses der Fall, so sind die Gleichungen I) und II) meist bequemer als diejenigen bei III) und IV), weil aus den ersteren nach Ausführung der Rektifikation nur noch einzelne Grössen zu eliminiren sind, während letztere nach der Elimination auf eine zu integrirende Differentialgleichung führen.

11. Auf einem Kreise mit dem Radius a rollt ein zweiter Kreis mit dem Radius $2a$; gesucht wird die Curve, welche der Durchmesser des letzteren einhüllt.

Die Gleichungen der Basis und der rollenden Curve sind in unserem Falle die folgenden:

a) $$\xi^2 + \eta^2 = a^2$$

b) $$u^2 + v^2 = 4a^2$$

Setzt man den aus a) sich ergebenden Werth für η in die Gleichung I) ein, so erhält man:

c) $$(x - \xi)^2 + (y - \sqrt{a^2 - \xi^2})^2 = v^2$$

und die Gleichung II) wird zufolge a) und b):

$$\int \frac{2a\,dv}{\sqrt{4a^2 - v^2}} = \int \frac{a\,d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}}$$

d. h. $$2a \arcsin \frac{v}{2a} = a \arcsin \frac{\xi}{a} + const.$$

Hat der rollende Kreis eine solche Anfangslage, dass der einhüllende Durchmesser in die Richtung der η-Axe fällt, so fällt der Punkt $\begin{cases} u = 2a \\ v = o \end{cases}$ der rollenden Curve mit dem Punkte $\begin{cases} \xi = o \\ \eta = a \end{cases}$ der Basis zusammen. Setzen wir die Coordinaten dieser entsprechenden Punkte in die letzte Gleichung ein, so folgt, dass $const = o$. Daher ist

$$\arcsin \frac{\xi}{a} = 2 \arcsin \frac{v}{2a}.$$

Hieraus folgt, indem wir auf der rechten Seite die Formel $\sin 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ anwenden:

$$\frac{\xi}{a} = 1 - 2\left(\frac{v}{2a}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{v^2}{2a^2}$$

mithin ist

d) $$v^2 = 2a(a - \xi)$$

Substituiren wir diesen Werth von v^2 in c), so erhalten wir:

$$(x - \xi)^2 + (y - \sqrt{a^2 - \xi^2})^2 = 2a(a - \xi)$$

Diese Gleichung haben wir nach dem willkürlichen Parameter ξ zu differenziren und diesen dann zu eliminiren. Die Elimination wird einfacher, wenn wir

$$\frac{\xi}{a} = \cos\varphi, \text{ also } \xi = a\cos\varphi$$

setzen, wobei dann φ als willkürlicher Parameter zu betrachten ist. Durch diese Substitution geht die letzte Gleichung über in

$$(x - a\cos\varphi)^2 + (y - a\sin\varphi)^2 = 2a^2 - 2a^2\cos\varphi$$

oder

$$x^2 + y^2 - 2ax\cos\varphi - 2ay\sin\varphi + a^2 + 2a^2\cos\varphi = 2a^2$$

wofür wir auch, wenn wir beiderseits $2ax$ subtrahiren, schreiben können:

$$(x-a)^2 + y^2 - 2a\cos\varphi\,(x-a) - 2ay\sin\varphi = -2a(x-a)$$

Verlegen wir den Anfangspunkt des Coordinatensystems, unter Beibehaltung der Richtung der Axen, so, dass

$$x - a = x_1$$
$$y = y_1$$

wird, so erhalten wir anstatt der letzten Gleichung:

$$x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1\cos\varphi - 2ay_1\sin\varphi = -2ax_1$$

Führen wir endlich statt der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten ein, indem wir

$$x_1 = r\cos\vartheta \qquad y_1 = r\sin\vartheta$$

setzen, so ist

$$r^2 - 2ar\cos(\vartheta - \varphi) = -2ar\cos\vartheta$$

oder

e) $$\cos(\vartheta - \varphi) = \frac{r + 2a\cos\vartheta}{2a}$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach φ ergibt sich

$$\sin(\vartheta - \varphi) = 0$$

also ist

$$\cos(\vartheta - \varphi) = \pm 1$$

Hiernach wird e):

$$\pm 1 = \frac{2a\cos\vartheta + r}{2a}$$

oder

$$r = 2a(\pm 1 - \cos\vartheta)$$

Beide Curven sind sich deckende Cardioiden.

12. Eine Kettenlinie rollt auf einem Kreise, dessen Radius gleich dem Parameter der Kettenlinie ist. Gesucht wird die Curve, welche von einer Geraden eingehüllt wird, die parallel zur Scheiteltangente läuft und um den Parameter der Kettenlinie von derselben entfernt ist.

Ist a der Parameter der Kettenlinie, so ist die Gleichung des Kreises:

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2,$$

welche Gleichung wir durch die beiden Gleichungen:

$$\xi = a\cos\varphi, \qquad \eta = a\sin\varphi$$

ersetzen können. Ferner ist die Gleichung der rollenden Curve:

$$v = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}\right)$$

Hiernach verwandelt sich die Gleichung I) in die folgende:

α) $\qquad (x - a\cos\varphi)^2 + (y - a\sin\varphi)^2 = v^2,$

und die Gleichung II) wird nach Ausführung der angezeigten Integrationen:

$$a\varphi = \sqrt{v^2 - a^2} + const.$$

Berührt der Scheitel der Kettenlinie in der primitiven Lage derselben den auf der Axe der ξ liegenden Punkt des Kreises, so entspricht dem Werthe $\varphi = o$ der Werth $v = a$; daher ist $const = o$ zu setzen, und es ist also

β) $\qquad \sqrt{v^2 - a^2} = a\varphi$

woraus folgt:

$$v^2 = a^2(1 + \varphi^2)$$

Setzt man diesen Werth von v^2 in α) ein, so erhält man:

$$x^2 + y^2 - 2a(x\cos\varphi + y\sin\varphi) = a^2\varphi^2$$

Geht man mittelst der Gleichungen

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta$$

von rechtwinkligen Coordinaten zu Polarcoordinaten über, so wird die letzte Gleichung:

$$r^2 - 2ar\cos(\varphi - \vartheta) = a^2\varphi^2$$

oder

$$\gamma) \qquad r\cos(\varphi - \vartheta) = \frac{r^2 - a^2\varphi^2}{2a}$$

Hierin ist φ als willkürlicher Parameter anzusehen. Die Differentiation in Bezug auf denselben ergibt:

$$\delta) \qquad r\sin(\varphi - \vartheta) = a\varphi$$

Aus $\gamma)$ und $\delta)$ ist φ zu eliminiren. Setzt man zunächst zur Vereinfachung von $\gamma)$ den aus $\delta)$ sich ergebenden Werth $\varphi = \frac{r}{a}\sin(\varphi - \vartheta)$ in die rechte Seite der Gleichung $\gamma)$ ein, so erhält man

$$r\cos(\varphi - \vartheta) = \frac{r^2[1 - \sin^2(\varphi - \vartheta)]}{2a}$$

oder

$$r\cos(\varphi - \vartheta) = \frac{r^2\cos^2(\varphi - \vartheta)}{2a}$$

Diese Gleichung wird erfüllt entweder wenn

$$\varepsilon) \qquad r\cos(\varphi - \vartheta) = 0$$

oder wenn

$$\zeta) \qquad 1 = \frac{r\cos(\varphi - \vartheta)}{2a}$$

ist. Aus $\varepsilon)$ resultirt:

$$\varphi - \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

also

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \vartheta$$

Für diesen Werth von φ geht $\delta)$ über in

$$r = a\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right)$$

woraus ersichtlich, dass die eingehüllte Rollcurve eine Archimedische Spirale ist.

Aus $\zeta)$ dagegen folgt:

$$\cos(\varphi - \vartheta) = \frac{2a}{r}$$

Hieraus ergibt sich erstens

$$\sin(\varphi - \vartheta) = \frac{\sqrt{r^2-(2a)^2}}{r}$$

und zweitens

$$\varphi = \vartheta + \arccos\frac{2a}{r}$$

Diese beiden Werthe in δ) eingesetzt liefern als Gleichung der eingehüllten Rollcurve

$$\frac{\sqrt{r^2-(2a)^2}}{a} = \vartheta + \arccos\frac{2a}{r}$$

Die erste eingehüllte Rollcurve entsteht, wenn die Kettenlinie auf der Aussenseite, die zweite, wenn sie auf der Innenseite des Kreises rollt. Denn falls die Kettenlinie auf der Aussenseite des Kreises rollt, muss der Coordinatenanfang ein Punkt der eingehüllten Rollcurve sein; er wird nämlich umhüllt, wenn die rollende Curve durch ihre primitive Lage geht. Nun liegt der Coordinatenanfang auf der ersten, nicht aber auf der zweiten eingehüllten Rollcurve.

13. Man sucht diejenige Curve, welche auf der Innenseite eines Kreises rollen muss, damit eine in ihrer Ebene liegende Gerade eine Astrois umhüllt, deren Spitzen auf der Peripherie des Kreises liegen.

Falls wir den Radius des Kreises mit a bezeichnen, ist seine Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2 \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \xi = a\cos\varphi \\ \eta = a\sin\varphi \end{cases}$$

Die eingehüllte Curve hat die Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} x = a\cos^3\psi \\ y = a\sin^3\psi \end{cases}$$

Da die rollende Curve gesucht wird, haben wir die Gleichungen III) und IV) anzuwenden, und zwar sind in denselben die unteren Vorzeichen von v zu wählen, weil

sich die gesuchte Curve auf der concaven Seite des Kreises fortbewegen soll. Aus obigen Gleichungen folgt nun:

$$\eta' = \frac{d\eta}{d\xi} = -\operatorname{cotg}\varphi$$

$$p = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang}\psi$$

Für diese Werthe gehen die Gleichungen III) über in

$$\text{a)} \quad \begin{cases} a\cos\psi^3 - a\cos\varphi = -\dfrac{v\operatorname{tang}\psi}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\psi}} = -v\sin\psi \\ a\sin\psi^3 - a\sin\varphi = -\dfrac{v}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\psi}} = -v\cos\psi \end{cases}$$

und die Gleichung IV) wird

$$\text{b)} \quad -v' = \frac{-\operatorname{tang}\psi + \operatorname{cotg}\varphi}{1 + \operatorname{tang}\psi\operatorname{cotg}\varphi} = \operatorname{cotg}(\psi + \varphi)$$

Multiplizirt man die erste der Gleichungen a) mit $\cos\psi$ und die zweite mit $-\sin\psi$, so erhält man bei der Addition derselben:

$$a(\cos^4\psi - \sin^4\psi) - a(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) = o$$

oder, da $\cos^4\psi - \sin^4\psi = (\cos^2\psi + \sin^2\psi)(\cos^2\psi - \sin^2\psi) = \cos^2\psi - \sin^2\psi$ ist:

$$\cos^2\psi - \sin^2\psi = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$$

oder $\cos 2\psi = \cos(\varphi + \psi)$

mithin $2\psi = \varphi + \psi$

d. h. $\psi = \varphi$

Die erste der Gleichungen a) lässt sich demgemäss auch schreiben:

$$a\cos\varphi(\cos\varphi^2 - 1) = -v\sin\varphi \text{ oder}$$

$$a\cos\varphi\sin\varphi^2 = v\sin\varphi$$

$$a\cos\varphi\sin\varphi = v$$

$$\frac{a}{2}\sin 2\varphi = v.$$

Hieraus folgt:

$$cotg\, 2\varphi = \frac{\sqrt{1 - sin^2 2\varphi}}{sin\, 2\varphi} = \frac{\sqrt{a^2 - 4v^2}}{2v}$$

Die Gleichung b) dagegen liefert für $\psi = \varphi$:

$$cotg\, 2\varphi = -v'$$

Beide Werthe von $cotg\, 2\varphi$ gleichgesetzt liefern daher als Differentialgleichung der gesuchten Curve:

$$-v' = \frac{\sqrt{a^2 - 4v^2}}{2v}$$

oder

$$u = -\int \frac{2v\,dv}{\sqrt{a^2 - 4v^2}} + const.$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4v^2} + const.$$

Soll für $u = o$ $v = a$ werden, so muss $const = o$ sein und dann ist

$$2u = \sqrt{a^2 - v4^2}$$

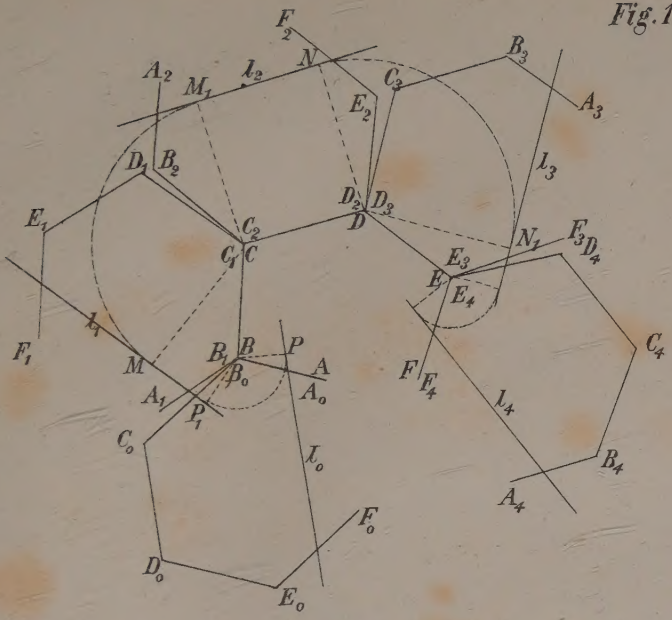
oder

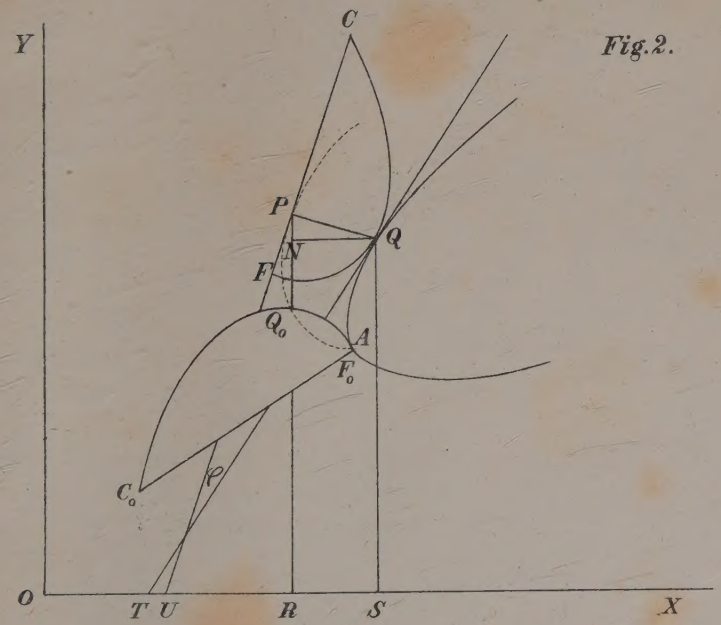
$$u^2 + v^2 = \frac{a^2}{4},$$

woraus ersichtlich, dass die gesuchte rollende Curve ein Kreis und die einhüllende Gerade ein Durchmesser desselben ist; ferner ist der Radius des rollenden Kreises gleich der Hälfte des Radius der Basis.

DRUCK VON FRIEDR. SCHEEL CASSEL.

Fig. 1.


F2
A2
M1
l2
N
B3
C2
A3
E2
D1
B2
l3
D2
D3
E1
C2
D
N1
E3
D4
C1
C
E
E4
l1
F1
M
B1
B
P
A
C4
B0
A1
A0
F
F4
P1
l4
C0
l0
B4
A4
F0
D0
E0


Y
C
Fig. 2.
P
Q
N
F
Q0
A
F0
C0
ρ
O
T
U
R
S
X